PROBABILIDAD.

Definiciones.

Experimento aleatorio: es aquel cuyo resultado es aleatorio, es decir, no podemos predecir el resultado. Ejemplo: tirar un dado, tirar una moneda, jugar a la lotería...

Espacio muestral: es el conjunto de todos los resultados posibles. Se escribe con la letra U o Ω. Ejemplo: si tiramos un dado el espacio muestral es $U=\{1,2,3,4,5,6\}$

Suceso: es cualquier subconjunto del espacio muestral. Ejemplo: en el caso de tirar un dado podemos tener: $A=\{1\}$, $B=\{2,5\}$, $C=\{ser\ par\}=\{2,4,6\}$

Suceso elemental: es el que tiene un sólo resultado. Ejemplo: $A=\{1\}$

Suceso compuesto: es el que tiene más de un resultado. Ejemplo: $B=\{2,5\}$

Suceso seguro: es el que ocurre siempre, coincide con el espacio muestral. Ejemplo $C=\{menor\ de\ 7\}$

Suceso imposible: es el que no ocurre nunca. Ejemplo, $D=\{8\}$

Operaciones con sucesos.

Unión: Son los elementos de los dos sucesos. Ejemplo: $A\cup B=\{1,2,5\}$

Intersección: Son los elementos de los dos sucesos a la vez. Ejemplo: $B\cap C=\{2\}$

Complemento o contrario: Se escribe $\overline{B}=\{1,3,4,6\}$, es decir, son los elementos del espacio muestral menos los del suceso que estamos complementando. Se cumple que $B\cup\overline{B}=U$ y $B\cap\overline{B}=\emptyset$

Propiedades de las operaciones.

Conmutativa	$A\cup B=B\cup A$	$A\cap B=B\cap A$
Asociativa	$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$	$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$
Idempotente	$A\cup A=A$	$A\cap A=A$
Simplificativa	$A\cup(A\cap B)=A$	$A\cap(A\cup B)=A$
Distributiva	$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$	$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$
Existencia de elemento neutro	$A\cup\emptyset=A$	$A\cap\Omega=A$
Complementación	$A\cup\bar{A}=\Omega$	$A\cap\bar{A}=\emptyset$
Involución	$\bar{\bar{A}}=A$	
Leyes de De Morgan	$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$	$\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$

Lanzamos un dado y observamos su puntuación. Comprueba que se cumplen las leyes de De Morgan con los sucesos A: sacar 2 ó 3 *y* B: sacar más de 4.

Expresamos los sucesos A, $\bar{A}$, B y $\bar{B}$ por extensión:

$$A=\{2,3\}\ ;\ \bar{A}=\{1,4,5,6\}$$
$$B=\{5,6\}\ ;\ \bar{B}=\{1,2,3,4\}$$

Así pues, para la primera ley de De Morgan:

$$\left.\begin{array}{l}\overline{A\cup B}=\Omega-(A\cup B)=\Omega-(\{2,3\}\cup\{5,6\})=\{1,4\}\\ \bar{A}\cap\bar{B}=\{1,4,5,6\}\cap\{1,2,3,4\}=\{1,4\}\end{array}\right\}$$

En efecto: $\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$

De igual forma, para la segunda ley de De Morgan:

$$\left.\begin{array}{l}\overline{A\cap B}=\Omega-(A\cap B)=\Omega-(\{2,3\}\cap\{5,6\})=\Omega-\emptyset=\Omega\\ \bar{A}\cup\bar{B}=\{1,4,5,6\}\cup\{1,2,3,4\}=\{1,2,3,4,5,6\}=\Omega\end{array}\right\}$$

En efecto: $\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$

Sucesos compatibles: son los que pueden ocurrir al mismo tiempo, o son los que su intersección no es vacía. Ejemplo: B y C son sucesos compatibles.

Sucesos incompatibles: son los que no pueden ocurrir al mismo tiempo, o son los que su intersección es vacía . Ejemplo: A y C son sucesos incompatibles, $A\cap C=\emptyset$

Definición de probabilidad.

Llamamos **probabilidad** a toda aplicación P definida entre los conjuntos S y $\mathbb{R}$ (conjunto de los números reales)

$$P: \quad S \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$A \longrightarrow P(A)$$

verificando los axiomas siguientes:

Axioma 1. La probabilidad del suceso seguro o espacio muestral es 1.

$$P(E) = 1$$

Axioma 2. Cualquiera que sea el suceso A, su probabilidad es un número no negativo.

$$P(A) \geq 0$$

Axioma 3. Si A y B son dos sucesos incompatibles, $A \cap B = \emptyset$, entonces la probabilidad del suceso unión es la suma de las probabilidades.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Propiedades de la probabilidad.

1. $P(A)+P(\overline{A})=1$
2. $P(\emptyset)=0$
3. $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
4. $P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)$

Regla de Laplace.

Si todos estos sucesos son equiprobables, es decir, tienen la misma probabilidad, la regla de Laplace dice:

La probabilidad de un suceso A formado por h sucesos elementales es igual al cociente entre el número de resultados favorables y el número de resultados posibles. Así,

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favorables al suceso}}{\text{número de casos posibles}}$$

3. En una caja tenemos 15 bolas blancas, 30 bolas negras y 45 bolas verdes. Si extraemos tres bolas simultáneamente, ¿cuál es la probabilidad de que salga una bola de cada color?

Calcularemos los casos posibles del experimento y los casos favorables al suceso del enunciado para aplicar la regla de Laplace.

Los casos posibles son las distintas formas de extraer 3 bolas entre 90. Como el orden no debe tenerse en cuenta, estos casos son:

$$\binom{90}{3} = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 117\,480$$

Los casos favorables son $15 \cdot 30 \cdot 45 = 20\,250$. Estas son las formas de agrupar tres bolas de distinto color. La probabilidad pedida es:

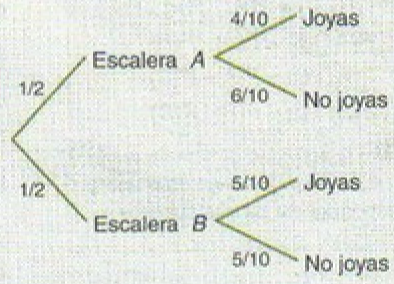
$$P(\text{tres bolas del mismo color}) = \frac{20\,250}{117\,480} = 0{,}1724$$

Todas lo que hemos visto en combinatoria, variaciones, variaciones con repetición, permutaciones y combinaciones, las vamos a utilizar ahora para calcular probabilidades con el método de Laplace.

Diagramas de árbol.

2. Una casa tiene dos escaleras. La escalera *A* tiene 10 pisos, en cuatro de ellos hay joyas; en la escalera *B*, cinco pisos tienen joyas y cinco no. Un ladrón entra al azar en una de las escaleras y luego en uno de los pisos. ¿Cuál es la probabilidad de que entre en un piso con joyas?

Teniendo en cuenta el diagrama de árbol con las probabilidades que aparecen en sus ramas, se obtiene la probabilidad siguiente:

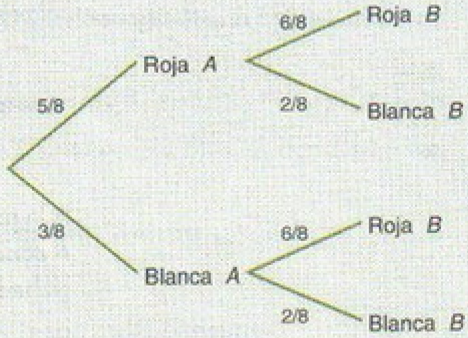


$P(\text{joyas}) = P(\text{joyas en escalera } A) + P(\text{joyas en escalera } B) =$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{10} = \frac{4}{20} + \frac{5}{20} = \frac{9}{20} = 0{,}45$$

3. Una urna, *A*, contiene 5 bolas rojas y 3 bolas blancas. Otra urna, *B*, contiene 2 bolas blancas y 6 rojas. Si se saca una bola de cada urna, ¿cuál es la probabilidad de que sean de igual color?

Procediendo como en la actividad anterior, los datos que aparecen en el diagrama de árbol nos permiten calcular la probabilidad siguiente:



$P(\text{bolas mismo color}) = P(RR \text{ o } BB) = P(RR) + P(BB) =$

$$= \frac{5}{8} \cdot \frac{6}{8} + \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{8} =$$

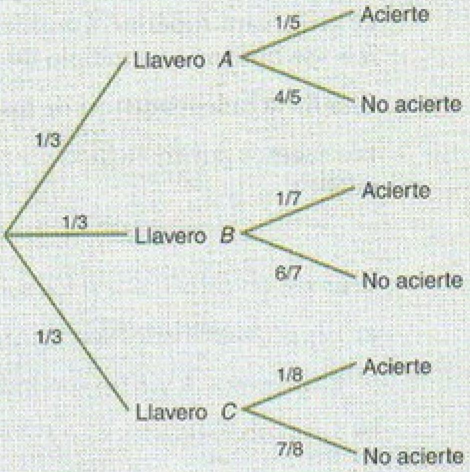
$$= \frac{30}{64} + \frac{6}{64} = \frac{36}{64} = 0{,}5625$$

4. En una casa hay tres llaveros *A*, *B* y *C*, el primero con 5 llaves, el segundo con 7 y el tercero con 8, de las que sólo una de cada llavero abre la puerta del trastero. Se escoge al azar un llavero y, de él, una llave para intentar abrir el trastero. Se pide:

a) ¿Cuál será la probabilidad de que se acierte con la llave?

b) ¿Cuál será la probabilidad de que el llavero escogido sea el tercero y la llave no abra?

Los datos del diagrama de árbol adjunto nos permiten calcular las probabilidades del enunciado.



a) $P(\text{acierte}) = P(\text{acierte con llavero } A) + P(\text{acierte con llavero } B) + P(\text{acierte con llavero } C) =$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{7} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{15} + \frac{1}{21} + \frac{1}{24} =$$

$$= \frac{56}{840} + \frac{40}{840} + \frac{35}{840} = \frac{131}{840} = 0{,}1560$$

b) $P(\text{no acierte con llavero } C) = \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{8} = \frac{7}{24} = 0{,}2916$

Ya hemos visto los diagramas de árbol en la combinatoria, ahora los vamos a utilizar para calcular probabilidades, suelen ser muy útiles cuando tenemos experimentos que se realizan en distintas etapas.

Ejercicios.

a) Se lanzan dos dados y tenemos los siguientes suceso: A, que salga suma par; y B, que al menos uno sea 2. Escribir los siguientes sucesos: A, B, $A\cup B$, $A\cap B$, $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{A}\cap B$.

8. En una urna tenemos cinco bolas blancas, tres bolas rojas y cuatro bolas negras. Si se extrae al azar una bola de la urna, calcula la probabilidad de los sucesos *A: bola negra, B: bola blanca o negra* y *C: bola azul.*

9. Cogemos una ficha de dominó del montón inicial. Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

   A: que sea la blanca doble *B: que la suma de los puntos sea 7*

10. Un juego consiste en lanzar dos dados. Si la diferencia entre los puntos de ambos es par, ganamos. En cambio, si la diferencia es impar, perdemos. Calcula la probabilidad de ganar y la de perder.

11. De una baraja española se extraen tres cartas. Halla la probabilidad de los siguientes sucesos:

    A: que haya al menos dos ases
    C: que salga al menos un oro
    B: que salga el rey de copas
    D: que no haya figuras

12. En una rifa de 100 000 números (del 0 al 99 999) se sortea un coche.

    a) ¿Cuál es la probabilidad de ganar el premio comprando 4 números?

    b) ¿Cuál es la probabilidad de que la papeleta premiada acabe en 2?

    c) ¿Cuál es la probabilidad de que la papeleta premiada no acabe en 24?

1 Dada una baraja de 40 cartas, al extraer una, determina la probabilidad de:

a) Que sea de oros. *b)* Sacar un as. *c)* Sacar una figura.

Solución: *a)* 1/4 *b)* 1/10 *c)* 3/10

2 Al lanzar dos dados y realizar el experimento de sumar los puntos, cuál es la probabilidad de:

a) Sumar 3. *b)* Sumar 7. *c)* Sumar 12.

Solución: *a)* 1/18 *b)* 1/6 *c)* 1/36

3 Calcular la probabilidad de que al lanzar tres monedas:

a) Salgan 3 caras.

b) Salga como mínimo una cara (éste es el suceso contrario de salir todo cruces).

c) Salgan más cruces que caras.

Solución: *a)* 1/8 *b)* 7/8 *c)* 1/2

4 Sean *A* y *B* dos sucesos tales que $p(A) = 0{,}7$; $p(B) = 0{,}5$ y $p(A\cap B) = 0{,}4$. Calcula:

a) $p(A\cup B)$ *b)* $p(\bar{A}\cap\bar{B})$

Solución: *a)* 0,8 *b)* 0,2

5 En un experimento aleatorio se dan cuatro sucesos elementales: *A, B, C* y *D*. La probabilidad de $p(A) = 0{,}3$; $p(B) = 0{,}1$; $p(C) = 0{,}4$. ¿Cuál es la probabilidad del suceso *D*?

Solución: 0,2

6 Una moneda está trucada de modo que la probabilidad de salir cara es el triple que la de salir cruz. ¿Cuál es la probabilidad de obtener cruz en un lanzamiento?

Solución: 1/4

7 Un dado está trucado de modo que la probabilidad de salir cada una de sus caras es proporcional al número de éstas. Calcula la probabilidad de obtener un 4 al lanzar el dado.

Solución: 4/21

16. Lanzamos un dado y consideramos los sucesos *A: obtener un número estrictamente menor que 3* y *B: obtener un número impar.* Halla la probabilidad de los sucesos $A, B, A\cup B, A\cap B, \bar{A}, \bar{A}\cap B, \overline{A\cup B}, \overline{A\cap B}$.

    Sol.: $\frac{1}{3}; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{1}{6}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{5}{6}$

17. Lanzamos una moneda y un dado. Sean los sucesos *A: obtener cara* y *B: obtener un punto.* Calcula la probabilidad de los sucesos $A, B, A\cup B, A\cap B, \bar{A}, \bar{B}, \overline{A\cup B}, \overline{A\cap B}$.

    Sol.: $\frac{1}{2}; \frac{1}{6}; \frac{7}{12}; \frac{1}{12}; \frac{1}{2}; \frac{5}{6}; \frac{5}{12}; \frac{11}{12}$

18. En unas pruebas para obtener el carné de conducir la probabilidad de que los examinados superen la prueba teórica es 0,45; la de que superen la prueba práctica, 0,4; y la de que superen ambas pruebas, 0,3.

    Si elegimos al azar uno de los examinados, calcula:

    a) La probabilidad de que superase la prueba práctica, pero no la teórica.

    b) La probabilidad de que superase la prueba teórica, pero no la práctica.

    c) La probabilidad de que no superase ninguna de las dos.

    Sol.: *a)* 0,1; *b)* 0,15; *c)* 0,45

19. Calcula la probabilidad de que, al extraer cuatro cartas de una baraja española, todas sean de bastos:

    a) Si las cartas se extraen simultáneamente.

    b) Si las cartas se extraen una tras otra, devolviendo al mazo cada una antes de extraer la siguiente.

    Sol.: *a)* 0,0025; *b)* 0,0039

20. Efectuamos una apuesta de la lotería Primitiva.

    a) ¿Cuál es la probabilidad de no acertar ningún número de la combinación ganadora?

    b) ¿Y la de acertar los seis?

    Sol.: *a)* 0,436; *b)* $7{,}151 \cdot 10^{-8}$