TEMA 7: FUNCIONES. PROPIEDADES Y OPERACIONES.

Definiciones.

Una función es una relación entre los elementos de dos conjuntos. Se escribe:

$f : A \rightarrow B$

$x \rightarrow y = f(x)$

En una función para cada elemento de A se le asocia un único elemento de B. Al conjunto A se le llama conjunto original o inicial. Al conjunto B se le llama conjunto final. Se llama variable independiente a x, mientras que y es la variable dependiente. Si A y B están formados por números reales, la función se llama función real de variable real.

Dominio: es el conjunto original. Es el subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ formado por todos los elementos x que tienen imagen $y = f(x)$, se representa por D(f).

Recorrido: es el conjunto imagen. Es el subconjunto $B \subset \mathbb{R}$ formado por todos los elementos y para los cuales existe al menos un elemento x del dominio con $f(x) = y$, se representa por R(f)..

Representación gráfica de una función. Es la representación en el plano XY de los pares de puntos $(x, y) con\ y = f(x), es\ decir, los\ pares (x, f(x))$.

Las funciones se pueden definir de varias maneras: mediante una *tabla* de datos, mediante una *gráfica*, mediante una *expresión escrita* y de forma *analítica* en la que a través de una fórmula o ecuación se expresa la relación entre las variables x e y. La ecuación puede estar dada de forma explícita, $y = f(x)$, o de forma implícita $f(x, y)$.

Propiedades de las funciones.

Signo de la función. Dada un función f(x), determinar su signo es hallar para qué valores del dominio es f(x) < 0 (en la gráfica están por debajo del eje X) y f(x) > 0 (en la gráfica están por debajo del eje X).

Ceros de la función. También se llaman raíces de la función. Son los valores del dominio que satisfacen f(x) = 0, es decir, que son las soluciones de la ecuación f(x) = 0.

Monotonía. Es la variación de la función respecto a la variable independiente x. Comprende los conceptos de crecimiento y decrecimiento.

- Un función se dice creciente en un intervalo (a, b) del dominio si para cada par de puntos x_1 y x_2 del intervalo con $x_2 > x_1$ se cumple que $f(x_2) > f(x_1)$. Eso significa que si nos desplazamos hacia la derecha en el eje X, la función se desplaza hacia arriba en el eje Y.

- Un función se dice decreciente en un intervalo (a, b) del dominio si para cada par de puntos x_1 y x_2 del intervalo con $x_2 > x_1$ se cumple que $f(x_2) < f(x_1)$. Eso significa que si nos desplazamos hacia la derecha en el eje X, la función se desplaza hacia abajo en el eje Y.

Puntos extremos. Son los puntos más altos y más bajos de la gráfica de una función. Un máximo de una función es un punto cuya coordenada y es mayor que las de los puntos que lo rodean. Un mínimo de una función es un punto cuya coordenada y es menor que las de los puntos que lo rodean. Si el máximo (mínimo) es para toda la función se dice absoluto. Si el máximo (mínimo) es solamente para una zona de la función se dice relativo.

Acotación. Una función se dice acotada cuando el recorrido está entre dos valores y por lo tanto su gráfica estará entre dos rectas. Una función está acotada superiormente si existe un real k tal que f(x) ≤ k para todo el dominio; el número k se llama cota superior. Una función está acotada inferiormente si existe un real k tal que f(x) ≥ k para todo el dominio el número k se llama cota inferior. Una función se dice que está acotada si lo está superiormente e inferiormente.

Simetría. Las simetrías de las funciones nos van a facilitar su representación gráfica. Una función se dice par si se cumple para todos los puntos del dominio que f(x) = f(-x). En este caso es simétrica respecto al eje OY. Una función se dice impar si se cumple para todos los puntos del dominio que f(-x) = -f(x). En este caso se dice que es simétrica respecto al origen de coordenadas.

Periodicidad. Un función es periódica si se repite cada cierto intervalo de amplitud T. Es decir, que se cumple que para todo el dominio que f(x) = f(x + T). Al valor T se le llama período.

Operaciones con funciones.

Al igual que los números, las funciones pueden realizar operaciones algebraicas. En todos los casos debemos tener cuidado con los dominios de las funciones que participan en la operación y de la función resultado de la operación.

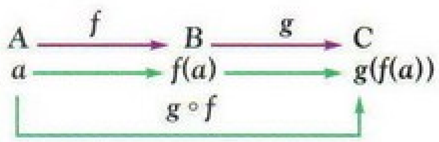
Suma de funciones. Se define como: (f + g)(x) = f(x) + g(x).

Diferencia de funciones. Se define como: (f - g)(x) = f(x) - g(x).

Producto de funciones. Se define como: (f·g)(x) = f(x)·g(x).

Cociente de funciones. Se define como: $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$.

Composición de funciones. Esta es una operación especial que se utiliza mucho para crear nuevas funciones. Componer dos funciones es aplicar una de ellas sobre la imagen de la otra. Se debe tener cuidado con los dominios. Dadas dos funciones $f: A\rightarrow B$ y $g: B\rightarrow C$, la función compuesta de f y g es una nueva función $g\circ f: A\rightarrow C$ que satisface la condición: $(g\circ f)(x)=g(f(x))$



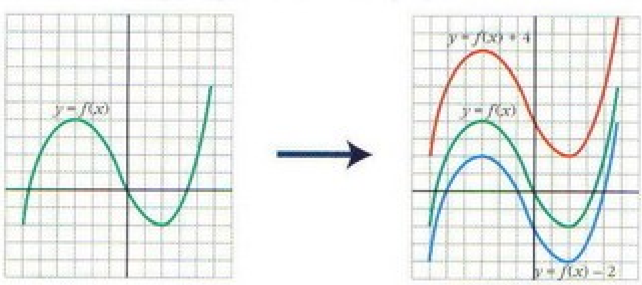
Ejemplo: $f(x)=\sin(x)\,;\, g(x)=x^2+1\,;\,(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(\sin(x))=\sin^2(x)+1$. Observamos que $(f\circ g)(x)\neq(g\circ f)(x)$, $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x^2+1)=\sin(x^2+1)$.

Transformaciones de funciones.

Muchas veces se pueden realizar sencillas transformaciones en las funciones que son muy sencillas de representar gráficamente.

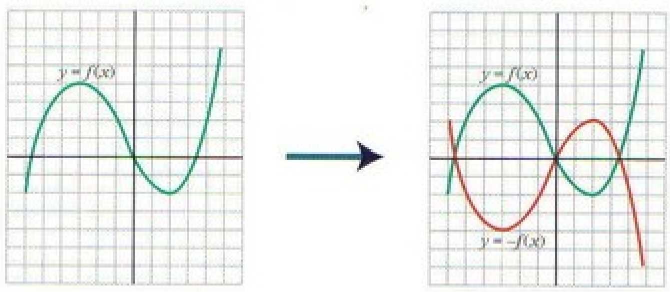
Representación de y = f(x) ± k a partir de y = f(x).

Si k es positivo entonces la gráfica de la función se desplaza hacia arriba k unidades y si es negativo se desplaza hacia abajo k unidades. Ejemplo:



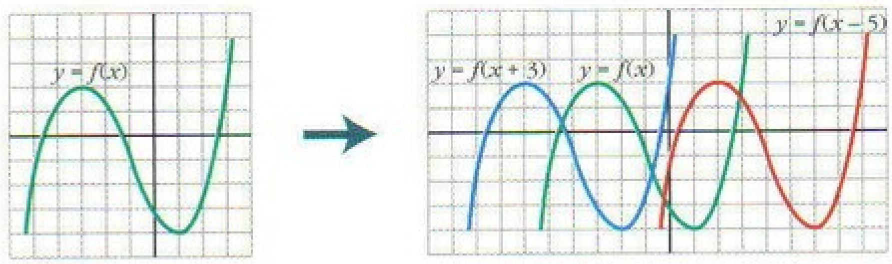
Representación de y = - f(x) a partir de y = f(x).

La gráfica de y = - f(x) es la simétrica de la de y = f(x) respecto del eje X. Ejemplo:



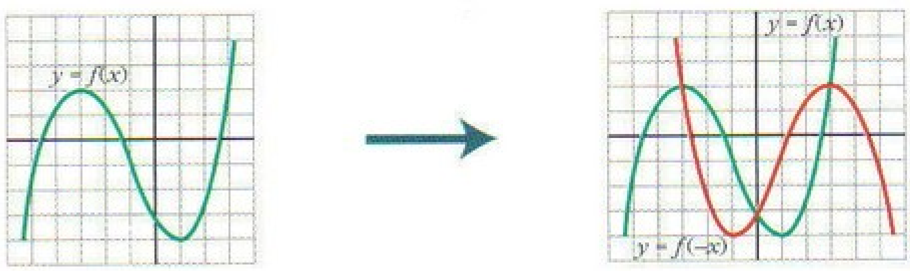
Representación de y = f(x ± a) a partir de y = f(x).

Si a es positivo, las gráficas de y = f(x - a) y de f(x + a) son como la de y = f(x) pero desplazadas a unidades hacia la derecha y hacia la izquierda respectivamente. Ejemplo:



Representación de y = f(- x) a partir de y = f(x).

La gráfica de y = f(- x) es la simétrica de la de y = f(x) respecto al eje Y. Ejemplo:

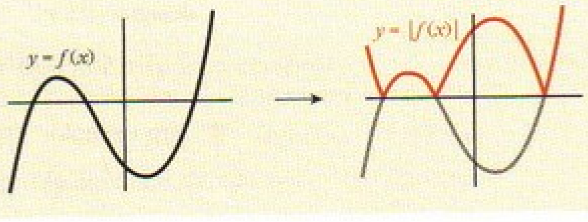


Representación del valor absoluto de una función.

Recordamos la definición de valor absoluto de un número: $|a|=\begin{cases} a \; si \; a \geq 0 \\ -a \; si \; a<0 \end{cases}$

En general, el **valor absoluto** de una función se define así:

$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{cuando } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{cuando } f(x) < 0 \end{cases}$$



EJERCICIOS.

1.- Calcula las funciones suma, diferencia, producto y cociente de $f(x)=\ln(x)$ y $g(x)=\frac{x}{x-4}$ En cada caso indica su dominio. Calcula $g^{-1}(x)$. Estudia sus simetrías.

2.- Calcula la función inversa $f^{-1}(x)$ de la función $f(x)=\frac{x+2}{2x+1}$. Con la función y su inversa, calcula las composiciones $(f\circ f^{-1})(x)$ y $(f^{-1}\circ f)(x)$. ¿Qué observas?.

3.- Calcula el dominio y la función inversa de $f(x)=\sqrt{x^2-4}$.

4.- Dadas $s(x)=\sin(x)$ y $t(x)=\frac{x+2}{x^2-1}$, calcula $(s\circ t)(x)=s(t(x))$ y $(t\circ s)(x)=t(s(x))$, ¿son iguales?. Estudia la simetría y periodicidad de s(x) y t(x).

5.- Dadas las funciones $f(x)=\frac{x+2}{2x+1}$ y $g(x)=\sqrt{x}$, calcula las funciones compuestas $(g\circ f)(x)$, $(f\circ g)(x)$ y $(f\circ f)(x)$. Estudia el dominio y simetrías de todas las funciones del problema.

6.- Representa la parábola $f(x)=x^2-2x-3$. Calcula su dominio, su recorrido, sus puntos de corte con el eje X, su monotonía, sus extremos, su acotación, su simetría y su periodicidad. Haz lo mismo con la función $g(x)=-x^2+5x-4$.

7.- Con la parábola f(x) del ejercicio anterior, calcula y dibuja $f(x)+2$, $f(x+1)$, $-f(x)$, $f(-x)$, $|f(x)|$ y $f(x-1)+1$. Haz lo mismo con g(x).

8.- Representa gráficamente la siguiente función e indica su dominio y recorrido.

$$f(x)=\begin{cases} 2x+6 \; si \; x<-2 \\ x^2-2 \; si -2\leq x<1 \\ 1 \; si \; x>1 \end{cases}$$

9.- Dada la siguiente gráfica de una función, calcula su dominio, recorrido, el signo, la monotonía, los extremos, la acotación, la simetría y la periodicidad.