TEMA 6: SISTEMAS DE ECUACIONES E INECUACIONES.

SISTEMAS DE ECUACIONES.

Definiciones.

Un sistema de ecuaciones es un conjunto de varias ecuaciones que se deben resolver de manera conjunta, es decir, que los valores de las incógnitas que son soluciones de todas las ecuaciones simultáneamente son las soluciones del sistema.

Se pueden clasificar los sistemas según el número de ecuaciones del sistema (dos ecuaciones, tres ecuaciones...), según el número de incógnitas (una incógnita, dos incógnitas...), según el grado de las incógnitas (lineal, cuadrático, no lineal...).

Una clasificación importante es según las soluciones: un sistema incompatible (I) es el que no tiene solución (pero sus ecuaciones si pueden tener solución); un sistema es compatible determinado (CD) si tiene una solución única y será compatible indeterminado (CI) si tiene más de una solución.

Sistemas equivalentes son los que tienen las mismas soluciones. Para resolver sistemas normalmente se manipulan las ecuaciones obteniendo sistemas equivalentes que son más sencillos de resolver.

Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Son los sistemas del tipo: $\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}$

Para resolverlos se utilizan uno de los tres métodos conocidos: sustitución, reducción e igualación. También se pueden resolver gráficamente. Vamos a verlo con un ejemplo: $\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases}$

Igualación. Se despeja la misma incógnita en las dos ecuaciones y se igualan. $x = \frac{2y+4}{3}$ $x = \frac{7-3y}{2}$

Como x = x, entonces $\frac{2y+4}{3} = \frac{7-3y}{2}$, ahora multiplicamos por 6 para eliminar denominadores y agrupamos términos, entonces tenemos: 4y + 9y = 21 – 8; de aquí $y = \frac{13}{13} = 1$, ahora sustituímos y obtenemos x = 2, la solución es entonces el par (2, 1).

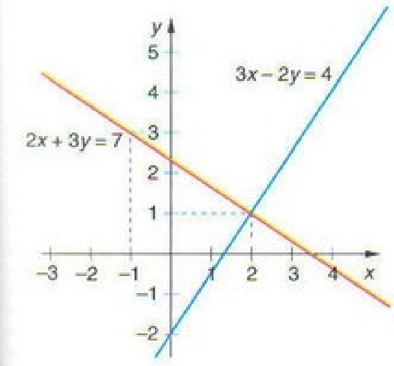
Sustitución. Se despeja una de las incógnitas en una de las ecuaciones y se sustituye en la otra. $x = \frac{2y+4}{3}$, $2 \cdot \left(\frac{2y+4}{3} \right) + 3y = 7$, multiplicando por 3 y operando llegamos a 4y + 9y = 21 – 8; y vemos que se llega a la misma solución de antes.

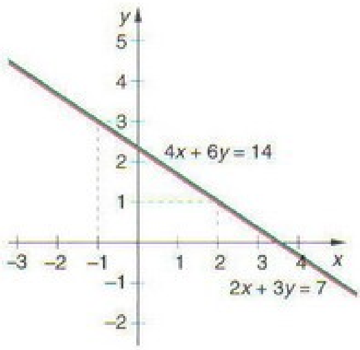
Reducción. Se opera con las ecuaciones para eliminar una de las incógnitas y se resuelve la otra. En nuestro ejemplo multiplicamos la primera ecuación por 3 y la segunda por 2 y entonces tenemos $\begin{cases} 9x - 6y = 12 \\ 4x + 6y = 14 \end{cases}$, ahora sumamos las dos ecuaciones y obtenemos 13x = 26; x = 2. Ahora se despeja en cualquiera de las ecuaciones la otra incógnita y se resuelve, en este caso y = 1.

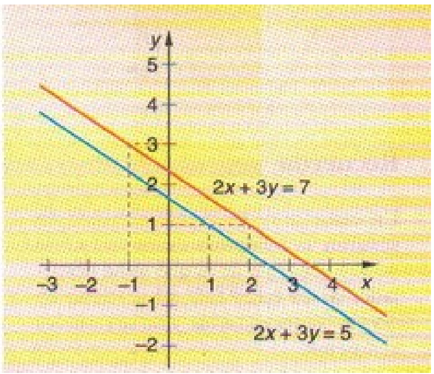
En este ejemplo la solución es compatible determinada, pero igualmente pueden aparecer soluciones compatibles indeterminadas o incompatibles. Una forma de verlo es la siguiente:

$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \Rightarrow CD$; $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \Rightarrow CI$ y $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2} \Rightarrow I$

Gráficamente. Se dibujan las rectas y se estudia la solución.







El dibujo de la izquierda es compatible determinado, el del centro es compatible indeterminado y el de la derecha es incompatible.

Sistemas de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas.

Estos sistemas se suelen resolver por distintos métodos, el más inmediato es el de sustitución, pero se pueden manipular las ecuaciones para reducir una incógnita o despejar una incógnita e igualar las ecuaciones dos a dos. Hay también métodos más avanzados como el de Gauss o utilizando determinantes llamado método de Cramer.

Sistemas de ecuaciones no lineales.

Lo normal en estos sistemas es resolverlos por sustitución, pero en ocasiones con manipulaciones sencillas de las ecuaciones podemos reducir las incógnitas, depende del sistema. Debemos comprobar las soluciones por si debemos descartar alguna de ellas.

Sistemas de ecuaciones con parámetros.

En ocasiones hay sistemas que, además de las incógnitas, presentan parámetros, en estos casos el sistema se debe resolver con los parámetros y al final realizar una discusión de las posibles soluciones dependiendo del valor de los parámetros

SISTEMAS DE INECUACIONES.

Introducción.

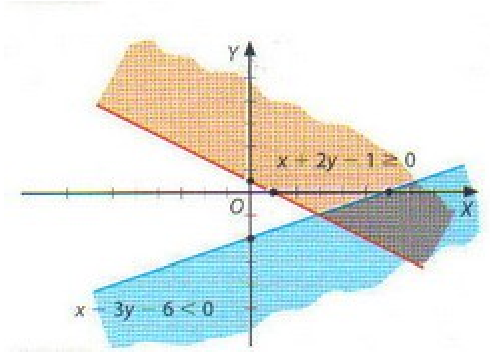
Al igual que en los sistemas de ecuaciones, vamos a tener aquí varias inecuaciones que se deben resolver conjuntamente para encontrar la solución del sistema. Y al igual que en los sistemas de ecuaciones hay varias clasificaciones, así que no vamos a abundar en el tema. La solución se suele presentar gráficamente ya que la resolución gráfica es la que más se suele emplear en estos sistemas, y casi siempre es la única forma de resolverlos de forma sencilla.

Sistemas de inecuaciones de primer grado con una incógnita.

Son los sistemas de tipo $\begin{cases} a_1 x+b_1<0 \\ a_2 x+b_2<0 \end{cases}$ (he escrito las inecuaciones con la desigualdad "<" pero pueden ser cualquiera de las otras tres: "<", ">", "<=", ">="; pueden ser más de dos inecuaciones). Para resolver el sistema se resuelven por separado las dos inecuaciones y luego se hace la intersección de las soluciones de cada una de ellas; la solución final puede se un punto, un intervalo finito o infinito o no tener solución.

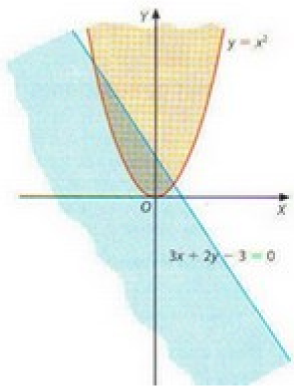
Sistemas de inecuaciones de primer grado con dos incógnitas.

Son aquellos sistemas del tipo: $\begin{cases} a_1 x + b_1 y < c_1 \\ a_2 x + b_2 y < c_2 \end{cases}$ (he escrito las inecuaciones con la desigualdad "<" pero pueden ser cualquiera de las otras tres: "<", ">", "<=", ">="; pueden ser más de dos inecuaciones). Para resolver estos sistemas se representan gráficamente las soluciones de las inecuaciones individuales y después se halla la intersección de todas las soluciones. Vamos a ver un ejemplo:



Sistemas de inecuaciones no lineales.

Aparecerán en estos sistemas una o más inecuaciones no lineales. Pueden ser con una incógnita o con dos incógnitas, en los dos casos la forma de resolverlo es igual a la que se he descrito en los sistemas anteriores. Se resuelven individualmente y después se calcula la intersección de todas las soluciones. Veamos un ejemplo.



Inecuaciones con valor absoluto.

Realmente son inecuaciones pero como aparece el valor absoluto, entonces hay que separarlas en dos o más inecuaciones y tenemos un sistema. Una vez que tenemos el sistema se resuelve por el método conocido. Para poder obtener el sistema debemos conocer las siguientes propiedades del valor absoluto que aplicaremos:

$|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$ y $|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a \; o \; x \geq a$

EJERCICIOS.

1.- Resuelve los siguientes sistemas gráficamente y analíticamente por los tres métodos:

a) $\begin{cases} 3x+2y=7 \\ 6x-4y=-3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x-6(y-2)=-6 \\ 3(x-1)+2y=23 \end{cases}$ $(x=6, x=4)$

2.- Resuelve los sistemas de ecuaciones lineales:

a) $\begin{cases} 2x+3y-2z=0 \\ x-y+z=0 \\ x+y+z=3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+3y-2z=-1 \\ -x+y+z=6 \\ 2x+3y-z=1 \end{cases}$ $(x=-1, y=2, z=3)$

3.- Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones no lineales y paramétricos:

a) $\begin{cases} x-y=3 \\ x^2+y^2=45 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+y=7 \\ x\cdot y=12 \end{cases}$ $(x=4, y=3)\, o\, (x=3, y=4)$

c) $\begin{cases} 3x+my=-5 \\ x+4y=10 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x+my=3m-1 \\ mx+2y=5 \end{cases}$

4.- Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

a) $\begin{cases} \dfrac{x+2}{2}>3+x \\ x+2\leq 1-2x \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+5>4x-4 \\ 2x-7<3x-3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x-y>1 \\ x-3y<4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x+y\leq 3 \\ x+y\geq 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} y\geq x^2-x-2 \\ 3x+2y-3<0 \end{cases}$

5.- Resuelve las siguientes inecuaciones con valor absoluto:

a) $|1-3x|\leq 2$

b) $|x|-|x+5|\leq 7$