TEMA 5: ECUACIONES E INECUACIONES.

ECUACIONES.

Definiciones.

Las ecuaciones son uno de los métodos más conocidos y utilizados para resolver problemas.

Resolver una ecuación es hallar sus soluciones. Normalmente para ello se suele trasformar, mediante operaciones algebraicas, la ecuación dada en otra más sencilla que tiene las mismas soluciones; es lo que se llaman ecuaciones equivalentes. Una ecuación se dice compatible determinada cuando tiene una sola solución o un número finito de ellas, si tiene infinitas soluciones se llama compatible indeterminada, por último si no tiene solución se dice incompatible.

Las reglas más utilizadas para obtener ecuaciones equivalentes son:

Regla de la suma: $a=b \Leftrightarrow a\pm c=b\pm c$

Regla del producto: $a=b \Leftrightarrow a\cdot c=b\cdot c \; si \; c\neq 0$

Para resolver ecuaciones es útil en ocasiones el método de factorización: $a\cdot b=0 \Leftrightarrow a=0 \; ó \; b=0$

Ecuaciones de primer grado o lineales.

Son aquellas equivalentes a $ax+b=0$ donde $a, b\in \mathbb{R} \; y \; a\neq 0$.

La solución es: $x=\frac{-b}{a}$

Ecuaciones de segundo grado o cuadráticas.

Son aquellas equivalentes a $ax^2+bx+c=0$ donde $a, b, c\in \mathbb{R} \; y \; a\neq 0$

Para resolverlas empleamos la siguiente fórmula: $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

El número de soluciones de la ecuación depende del signo de la expresión $\Delta=b^2-4ac$ llamado discriminante. Tenemos entonces tres casos:

- No tiene solución: $\Delta<0$
- Tiene una solución doble: $\Delta=0$
- Tiene dos soluciones: $\Delta\neq 0$

En ocasiones en la ecuación falta alguno de los términos y se dice que no es completa, en este caso no es necesario aplicar la fórmula:

$ax^2=0$	Solución doble x = 0
$ax^2+bx=0$	Dos soluciones diferentes: x = 0 y $x=\frac{-b}{a}$
$ax^2+c=0$	Dos soluciones diferentes si $\frac{-c}{a}>0$

Dadas las dos soluciones x_1 y x_2 de una ecuación cuadrática, se cumplen las siguientes propiedades:

a) $x_1+x_2=\frac{-b}{a}$ b) $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$

Ecuaciones bicuadradas.

Son aquellas equivalentes a $ax^4+bx^2+c=0$ donde $a, b, c \in \mathbb{R}\ y\ a \neq 0$

Para resolverla la trasformamos en una ecuación de segundo grado de la siguiente forma: hacemos el cambio de variable $x^2=t$, nos queda entonces la ecuación: $at^2+bt+c=0$, la resolvemos y, por último, deshacemos el cambio de variable sustituyendo las soluciones de $at^2+bt+c=0$ en $x^2=t$ y extraemos las raíces cuadradas para obtener los valores de x, debemos estudiar las posibles soluciones.

Ecuaciones polinómicas factorizables.

Para estas ecuaciones lo único que podemos hacer es intentar factorizarlas en términos de grado uno y dos aplicando el método de Ruffini (recordad que los divisores del término independiente son las posibles raíces del polinomio), y se resuelven aplicando el método de factorización .

Ecuaciones con radicales.

Son aquellas en las que la incógnita x se encuentra bajo una raíz cuadrada. El método para resolver estas ecuaciones es ir eliminando la raíz o raíces, para ello se aísla en un miembro una raíz y se elevan al cuadrado los dos miembros. Al elevar al cuadrado aparecen soluciones nuevas que debemos rechazar, por eso es muy importante comprobar las soluciones.

Ecuaciones con fracciones algebraicas o racionales.

En estas ecuaciones aparecen fracciones algebraicas y se resuelven reduciendo a común denominador las fracciones y simplificando lo máximo posible, finalmente se resuelve la ecuación polinómica que aparece. Al operar con las fracciones algebraicas pueden aparecer soluciones nuevas que no son soluciones de la ecuación original o no son válidas (por ejemplo, una posible solución que anula un denominador); así que siempre debemos comprobar las soluciones en la ecuación original. Debemos tener cuidado con los valores que anulan el denominador.

Ecuaciones con valor absoluto.

En estas ecuaciones aparecen valores absolutos. Se resuelven eliminando el valor absoluto, una vez con valor positivo y otra vez con valor negativo, de esta forma pueden aparecer dos o más ecuaciones que se resuelven separadamente, al final la solución de la ecuación original son todas las soluciones de las ecuaciones separadas.

Ecuaciones con parámetro o paramétricas.

En estas ecuaciones aparece uno o más parámetros, a parte de la incógnita. Se resuelven tomando el parámetro con un valor determinado, y al final se discute según los valores del parámetro la existencia o no de solución o soluciones de la ecuación.

INECUACIONES.

Definiciones.

Una inecuación es una desigualdad entre expresiones algebraicas, es decir, en vez del signo "=" aparecen desigualdades: "<", ">", "≤" y "≥". Algunas de las reglas más utilizadas para obtener inecuaciones equivalentes son (caso con <, el resto es igual):

Regla de la suma: $a<b \Leftrightarrow a \pm c < b \pm c$

Regla del producto: $a<b \Leftrightarrow a \cdot c < b \cdot c\ si\ c>0$ y $a<b \Leftrightarrow a \cdot c > b \cdot c\ si\ c<0$ ¡cuidado!, aquí la desigualdad cambia de sentido.

Regla de la inversa: $a<b \Leftrightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

En los distintos tipos de inecuaciones escribiré siempre la desigualdad “<”, entendiendo que puede ser cualquiera de las otras tres. Los métodos de resolución son los mismos para los cuatro tipos de desigualdades.

Inecuaciones de primer grado.

Son aquellas equivalentes a $ax+b<0$ donde $a, b \in \mathbb{R}\ y\ a \neq 0$. La solución va a ser un intervalo en la recta real y no un punto como en las ecuaciones. La solución se debe representar gráficamente y escribirla en forma de intervalo.

Inecuaciones de segundo grado.

Son aquellas equivalentes a $ax^2+bx+c<0$ donde $a, b, c \in \mathbb{R}\ y\ a \neq 0$. En estos casos se debe resolver la ecuación de segundo grado equivalente: $ax^2+bx+c=0$ y escribimos la inecuación factorizada de la siguiente forma: $(x-x_1)\cdot(x-x_2)<0$, después se escribe una tabla estudiando los distintos signos en los intervalo que aparecen de cada uno de los factores y del producto. Puede no haber solución, o puede ser toda la recta real, un intervalo o dos intervalos.

Inecuaciones polinómicas factorizables.

En estas inecuaciones, factorizarmos la ecuación equivalente en términos de grado uno y dos aplicando el método de Ruffini. Después se crea una tabla como en las incuaciones de segundo grado y se estudian los signos en cada intervalo que aparece.

Inecuaciones con fracciones algebraicas o racionales.

En estas inecuaciones aparecen fracciones algebraicas y se resuelven reduciendo a común denominador las fracciones y simplificando lo máximo posible hasta obtener otra inecuación más sencillas del siguiente tipo: $\frac{p(x)}{q(x)}<0$, entonces factorizamos los dos polinomios p(x) y q(x) y escribimos una tabla y se resuelven como las anteriores. Debemos tener cuidado con los valores que anulan el denominador .

Inecuaciones de primer grado con dos incógnitas.

Son aquellas inecuaciones equivalentes a $ax+by+c<0$ con $a, b, c \in \mathbb{R}\ ; a \neq 0\ y\ b \neq 0$ Se resuelven de forma gráfica, para ello representamos la recta $ax+by+c=0$ La recta divide el plano en dos regiones, se toma un punto de una de las dos regiones y se sustituye en la inecuación, si cumple la desigualdad la región a la que pertenece es la solución, si no cumple la desigualdad entonces la otra región es la solución.

EJERCICIOS.

1.- Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{x-3}{2}-\frac{x-8}{12}=\frac{5-x}{4}-\frac{x}{3}$

b) $\frac{2(x-3)}{4}-\frac{x}{5}=\frac{x}{7}-\frac{2}{5}$

c) $(x-5)^2+(x+5)(x-5)=0$

d) $3(1-x)(x+1)=3$

e) $x^4-13x^2+36=0$

f) $x^2(x+7)(2x+9)=0$

g) $x^4-10x^2+25=0$

h) $x^2=(2x+1)(x-1)-5$

2.- Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^4+x^3-7x^2-x+6=0$

b) $x^5+x^4-9x^3-x^2+20x-12=0$

c) $\frac{2x+5}{x+1}-\frac{x+1}{x-3}=1$

d) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+2}=\frac{2}{x+1}$

e) $\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x+1}=\frac{1}{x^2-1}$

f) $\frac{x}{x+1}+\frac{x}{x+4}=1$

3.- Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\sqrt{1+x\sqrt{2x^2+8}}=x+1$

b) $\sqrt{3x+1}-\sqrt{2x-1}=1$

c) $\sqrt{x^2+x-2}=2x+4$

d) $|x^2-4|+3x=0$

e) $|6x^2-5x|=6$

f) $|x+1|+|x+3|=3$

4.- Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $3x+2\geq\frac{x-2}{2}$

b) $\frac{4x-9}{3}-x+1\geq\frac{3x-9}{5}$

c) $x^2+3x-10>0$

d) $3x^2+4x+2>0$

5.- Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $x^3-3x^2-x+3\leq 0$

b) $(x-4)(x^2-4)\geq 0$

c) $\frac{2-x}{x+3}\geq 0$

d) $\frac{x^2+x-6}{x-9}\leq 0$

e) $2x-y+6\leq 0$

f) $3x-2y-4>0$