TEMA 3: LAS DEMOSTRACIONES EN MATEMÁTICAS.

Definiciones.

Las matemáticas tienen un vocabulario y un conjunto de símbolos propio que se caracteriza por su precisión y brevedad. Los símbolo matemáticos más frecuentes son: numéricos, para designar conjuntos numéricos, para operaciones y para expresar relaciones.

Las palabras más utilizadas en la terminología matemática son las siguientes:

- Conceptos primitivos. Son ideas esenciales que no admiten definición porque no se pueden reducir a otras más simples, por ejemplo punto, conjunto y elemento.
- Definiciones. Una definición es una explicación del significado de un concepto señalando o indicando el contenido del mismo, por ejemplo número primo, función y límite de una función.
- Axiomas o postulados. Antiguamente se diferenciaba entre los dos conceptos. El axioma era un enunciado que se admitía sin demostración por considerarlo evidente, mientras que un postulado era un enunciado que se debería admitir y que era susceptible de ser demostrado. Actualmente no se distingue entre axioma o postulado por lo que la palabra postulado casi no se utiliza.

Teoremas, tipos de teoremas.

Mediante los símbolos, los conceptos primitivos, las definiciones y los axiomas podemos descubrir propiedades que tienen los objetos matemáticos que no están incluidas en sus definiciones. Estas propiedades no son evidentes y es necesario demostrarlas, se les conoce con el nombre de teoremas.

<u>Un teorema</u> es una propiedad que se justifica o se demuestra mediante un razonamiento o deducción lógica. En el enunciado de un teorema distinguimos dos partes, la <u>hipótesis</u> o condiciones de partida y la <u>tesis</u> o conclusión. Se denota hipótesis con H y tesis con T.

<u>Corolario.</u> Es una verdad que se deriva como consecuencia de un teorema. Suelen ser pequeños teoremas que suelen derivarse de otro teorema casi de forma inmediata, generalmente como casos particulares.

<u>Lema.</u> Es un teorema auxiliar que necesitamos durante el proceso de demostrar otro teorema que generalmente es más importante.

Un teorema escrito de la forma $H \Rightarrow T$ se llama <u>teorema directo</u>, siendo H la hipótesis y T la tesis y se lee "si se verifica H, entonces se verificará T". Hay otros teoremas relacionados con el directo:

<u>Teorema contrario.</u> Si no se verifica H, entonces no se verificará T (no H $\Rightarrow$ no T).

<u>Teorema recíproco.</u> Si se verifica T, entonces se verificará H ($T \Rightarrow H$).

<u>Teorema contrarrecíproco.</u> Si no se verifica T, entonces no se verificará H (no T $\Rightarrow$ no H).

Ejemplo.

- Directo: ser madrileño (H) significa ser español (T); $H \Rightarrow T$.
- Recíproco: ser español (T) significa ser madrileño (H); $T \Rightarrow H$. No se verifica, el hecho de ser español no implica ser madrileño.
- Contrario: no ser madrileño (no H) significará no ser español (no T); no H $\Rightarrow$ no T. No se verifica pues se puede no ser madrileño (por ejemplo andaluz) y ser español.
- Contrarrecíproco: no ser español (no T) significaría no se madrileño (no H); no T $\Rightarrow$ no H. Se verifica, pues si no se es español no se puede ser madrileño.

Las relaciones que se verifican entre los teoremas asociados son las siguientes:

- El teorema directo o contrarrecíproco son ambos ciertos o ambos falsos.
- El teorema contrario y recíproco son ambos ciertos o ambos falsos.

Condiciones necesarias y suficientes.

El teorema directo afirma que si se verifica H, entonces se verificará T. En lenguaje matemático se dice entonces que H es suficiente para que se cumpla T. Simbólicamente se expresa: $H \Rightarrow T$; H es condición suficiente para que se cumpla T.

En este mismo teorema también se dice que T es condición necesaria para que se cumpla H. Simbólicamente: $H \Rightarrow T$; T es condición necesaria para que se cumpla T.

Demostraciones matemáticas.

Una demostración es un razonamiento o deducción lógica que partiendo de unas hipótesis nos permite llegar a unas tesis o conclusiones. En matemáticas se han desarrollado muchos métodos de demostración, veamos algunos de los más comunes.

<u>Demostración directa.</u> Consiste en demostrar $H \Rightarrow T$, asumimos que H es cierta y mediante una serie de pasos y operaciones que sabemos correctos llegamos a la conclusión, con lo que el teorema estaría demostrado.

Ejemplo. Si n es múltiplo de 4 (H), entonces n es par (T). $H \Rightarrow T$.

Demostración: Suponemos que H es verdadero, y podemos escribir que $n = 4k$; pero si tomamos $t = 2k$, podemos escribir $n = 2.2k = 2t$ y llegamos q que n es par.

<u>Demostración por casos.</u> En ocasiones no podemos hacer la demostración para todos los casos a la vez y debemos demostrar todos los casos que se presentan.

Ejemplo: Si $n \neq 0$, entonces $n^2 > 0$.

Demostración. Lo haremos para $n > 0$ y para $n < 0$ por separado:
Si $n > 0$, multiplicamos los dos miembros por n con lo que nos queda $n^2 > 0$.
Si $n < 0$, multiplicamos los dos miembros por n que al ser negativo invierte la igualdad, y tenemos $n^2 > 0$.

<u>Demostración por contraejemplo.</u> A veces podemos encontrar un ejemplo, que se llama contraejemplo, para demostrar que la hipótesis es falsa.

Ejemplo. Todos los números pares son múltiplos de 4.

Contraejemplo. Basta con tomar el 6, que es un número par pero no es múltiplo de 4.

<u>Demostración por prueba directa.</u> En ocasiones podemos encontrar ejemplo directos de una afirmación. No debemos confundirlo con el anterior ya que el contraejemplo demuestra la falsedad de la hipótesis mientras que aquí demostramos la verdad.

Ejemplo. No todos los número pares son múltiplos de 4.

Demostración. Al igual que antes nos basta con el 6 que es par pero no es múltiplo de 4.

<u>Demostración inversa.</u> Lo que hacemos es suponer que la tesis (T) es falsa y llegamos a que la hipótesis (H) también lo es, con lo cual la demostramos que $H \Rightarrow T$, recordad que de lógica sabemos que la expresión $(H \Rightarrow T) \Leftrightarrow (\neg T \Rightarrow \neg H)$ es una tautología.

Ejemplo. Si n^2 es impar (H), entonces n es impar (T).

Demostración. Si suponemos que n es par (n no impar, $\neg T$), y al ser par: $\exists k \ / \ n = 2k$; entonces vemos que $n^2 = 4k^2$ que es par (n^2 no impar, $\neg H$). Y ya está demostrado.

Demostración por reducción al absurdo. Fue muy utilizada por Euclides ya en la antigua Grecia. Aquí suponemos que la tesis es falsa y llegamos a una contradicción o absurdo, de aquí deducimos que la tesis es verdadera y queda demostrado el teorema.

Ejemplo. El número $\sqrt{2}$ es irracional.

Demostración. Negamos la tesis y suponemos que $\sqrt{2}$ es racional, por lo que se puede expresar como $\frac{a}{b}$ con a, b $\in \mathbb{Z}$ y primos entre si (no tienen factores comunes). Esta igualdad podemos escribirla de la siguiente forma: a = $\sqrt{2} \cdot b$. Elevamos los dos miembros al cuadrado y tenemos: $a^2 = 2b^2$ y por lo tanto a^2 es par, pero si a^2 es par significa que a es par y podemos escribir a = 2p con p $\in \mathbb{Z}$, sustituimos en la expresión anterior: $a^2 = (2p)^2 = 4p^2 = 2b^2$; pero dividiendo entre 2 llegamos a que $2p^2 = b^2$ y por lo tanto tenemos que b^2 es par y de aquí también b es par. Hemos llegado entonces a que a y b son pares, pero esto contradice el hecho de que a y b son primos entre si; es decir, tenemos una contradicción o absurdo y de ella concluimos que $\sqrt{2}$ no es racional, es decir, es irracional.

Demostración por inducción. Se suele utilizar en demostraciones relacionadas con números naturales, para propiedades que cumplen todo el conjunto de números naturales. El proceso de demostración es el siguiente:

- Se comprueba que se cumple la hipótesis para el primer elemento del conjunto (H(1)).
- Suponemos que se cumple la hipótesis para n (H(n)) y la demostramos para n + 1 (H(n + 1)).

Ejemplo: Demostrar que $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^n = 2^{n+1} - 1$

Demostración.

- Veamos que la propiedad es cierta para n = 1:

$$2^0 + 2^1 = 1 + 2 = 3; \quad 2^{1+1} - 1 = 2^2 - 1 = 4 - 1 = 3.$$

- Suponemos que la propiedad es cierta para n y demostramos que es cierta para n + 1, es decir, queremos probar que

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^n + 2^{n+1} = 2^{n+2} - 1$$

para ello razonamos de la siguiente manera:

$$(2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^n) + 2^{n+1} = (2^{n+1} - 1) + 2^{n+1} = 2 \cdot 2^{n+1} - 1 = 2^{n+2} - 1$$

y queda probada la propiedad para n + 1; entonces, y por el método de inducción, podemos afirmar que la propiedad es cierta para cualquier número natural n.

EJERCICIOS

1.- Demuestre para cualquier número natural, n:

a) $3 \mid n \Rightarrow 6 \mid (n^2 - n)$

b) $\neg(2 \mid n^3) \Rightarrow \neg(4 \mid n)$

c) $12 \mid (n^5 - n^3)$

2.- Si a y b son dos números distintos y ambos positivos, demuestra, por el método de reducción al absurdo que:

$$\frac{a+b}{2} > \frac{2ab}{a+b}$$

3.- Demuestra que $\sqrt{3}$ es un número irracional.

4.- Demuestra que $\sqrt{5}$ es un número irracional.

5.- Demostrar que si $n^2 - 4n = 0$, entonces o $n = 0$ o $n = 4$. Explica la disyunción.

6.- Demuestra por inducción: $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow 5 \mid (n^5 + 4n)$.

7.- Demuestra por inducción: $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow 6 \mid (n^3 + 5n)$.

8.- Demuestra por inducción que: $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$

9.- Demuestra por inducción que: $1 + 3 + 5 + ... + (2n+1) = (n+1)^2$

10.- Demuestra por inducción que: $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = (1+2+3+...+n)^2 = \frac{n^2\cdot(1+n)^2}{4}$