TEMA 2: TEORÍA DE CONJUNTOS Y CONJUNTOS NUMÉRICOS.

TEORÍA DE CONJUNTOS.

Definiciones.

Se define un conjunto como una colección de objetos o cosas, se nombran con letras mayúsculas (A, B...). Cada uno de los objetos de un conjunto se llama elemento, se nombran con letras minúsculas (a, b...). Para indicar que un elemento pertenece a un conjunto utilizamos el símbolo $\in$ $(a \in A)$. Podemos definir los conjuntos de dos formas:

a) Por extensión: se nombran todos los elementos del conjunto y sólo estos, sin repetir. Por ejemplo: A = {a, e, i, o, u}.

b) Por comprensión: se nombra una propiedad que cumplen todos los elementos del conjunto y solo ellos. Por ejemplo: A = {x / x es una vocal}, B = {x / x es un número par}.

Cuando podemos contar los elementos del conjunto se dice que es finito, si no podemos contarlos decimos que el conjunto es infinito, por ejemplo, A es finito y B es infinito. Al número de elementos del conjunto se le llama cardinal del conjunto y se denota n(A). Por ejemplo n(A) = 5, n(B) = infinito (∞).

Se llama conjunto unitario al que tiene un solo elemento o tiene cardinal uno, y conjunto vacío es el que no tiene elementos o tiene cardinal cero. Se denota A = {} o A = $\emptyset$. Por ejemplo: C = {números reales con raíz cuadrada negativa}, n(C) = 0, C = $\emptyset$.

Dos conjuntos A y B son iguales si y solo si todos los que pertenecen a A también pertenecen a B y viceversa, se denota como A = B, y en lenguaje formal: $A = B \Leftrightarrow \forall x \in A \Rightarrow x \in B$ y $\forall x \in B \Rightarrow x \in A$. Por ejemplo: A = {1, 3, 5, 7, 9} y B = {x / x es un impar menor de 10}, se ve claramente que A = B.

Dados dos conjuntos A y B, decimos que B es subconjunto de A cuando todos los elementos de B pertenecen también a A. Se denota $B \subset A$. Por ejemplo: A = {1, 3, 5, 7, 9}, B = {1, 5, 9}; $B \subset A$.

Dos conjuntos se dicen disjuntos cuando no tienen ningún elemento en común; por ejemplo los conjuntos A = {2, 4, 6} y B = {1, 5, 9, 7} son disjuntos.

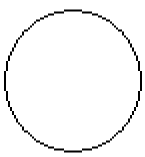
Se llama conjunto universal al que contiene a los demás como subconjuntos, se denota como U y se representa con un rectángulo. Por ejemplo: A = {a, o}, B = {e, i, u}; en este caso U = {x / x es vocal}.

Dado un conjunto A, su conjunto potencia es el formado por todos sus subconjuntos incluyéndose a él mismo y al conjunto vacío. Se denota como $\wp(A)$ o P(A) y si A tiene x elementos, $n(\wp) = 2^x$. Por ejemplo: A = {1, 3, 5}; $n(A) = 3 \Rightarrow n(\wp) = 2^3 = 8$. $\wp(A)$ = {{}, 1, 3, 5, {1, 3}, {1, 5}, {3, 5}, {1, 3, 5}}. El conjunto potencia también se llama conjunto de las partes de un conjunto.

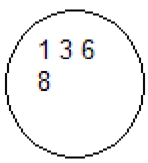
Diagramas de Venn.

Los diagramas de Venn son una forma de representar gráficamente conjuntos. Para ello se utilizan círculos y rectángulos, como hemos dicho, un rectángulo representa el conjunto universal y los conjuntos se representan con círculos. En ocasiones dentro del los círculos se escriben los elementos del conjunto, pero no siempre es necesario. Veamos algunos ejemplos, el conjunto U, el conjunto A sin sus elementos, el conjunto A con sus elementos y una representación de $A \subset B$.

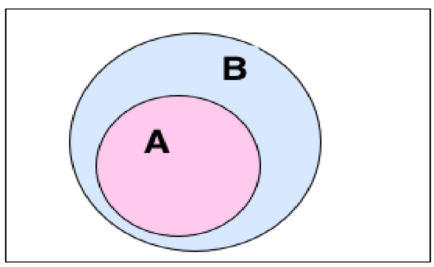
U



A

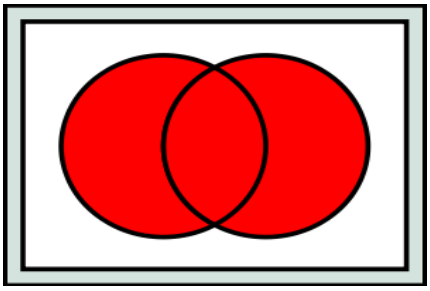


A

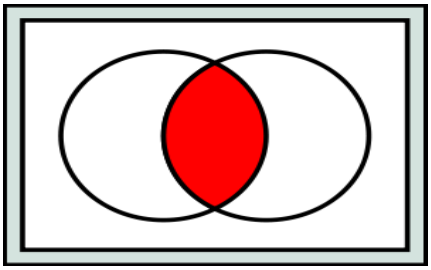


Operaciones con conjuntos.

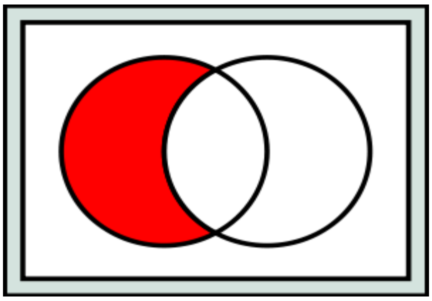
Unión. Dados dos conjuntos A y B, se llama unión de A y B al conjunto que contiene a todos los elementos de A y a todos los de B, se representa por $A \cup B$, formalmente: $A \cup B = \{x \,/\, x \in A \text{ o } x \in B\}$. Ejemplo: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$; $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Gráficamente:

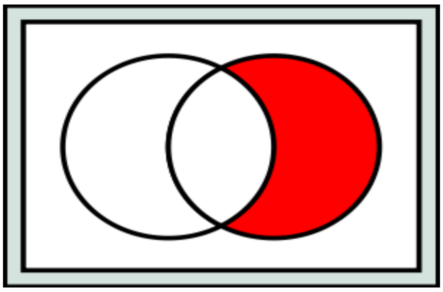


Intersección. Dados dos conjuntos A y B, se llama intersección de A y B al conjunto que contiene a todos los elementos que pertenecen a la vez al conjunto A y al conjunto B, se representa por $A \cap B$, formalmente: $A \cap B = \{x \,/\, x \in A \text{ y } x \in B\}$. Ejemplo: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$, entonces $A \cap B = \{4, 5\}$. Gráficamente:



Diferencia. Dados dos conjuntos A y B, se llama conjunto diferencia de A menos B al conjunto compuesto por todos los elementos de A que no pertenecen a B, formalmente: $A - B = \{x \,/\, x \in A \text{ y } x \notin B\}$. Ejemplo: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$, entonces $A - B = \{1, 2, 3\}$; $B - A = \{6, 7, 8\}$. Gráficamente:





Complementario. Dados dos conjuntos A y B y tales que B es subconjunto de A ($B \subset A$), se llama conjunto complementario de B respecto de A al conjunto $A - B$, se denota B_A^C. Vamos a verlo con un ejemplo: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2\}$; $B_A^C = A - B = \{3, 4, 5\}$.

Partición de un conjunto. Si tenemos varios subconjuntos A, B, C... de un universo U que cumplen que son disjuntos dos a dos (su intersección es el conjunto vacío) y la unión de todos es el universo, entonces se dice que tenemos una partición del universo U. Veamos un ejemplo: U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, A = {1, 2, 3}, B = {4, 5, 6, 7}, C = {8, 9} y D = {7, 8, 9}; entonces A, B y C son una partición de U, pero A, B y D no lo son porque $B \cap D = \{7\}$.

CONJUNTOS NUMÉRICOS.

Números naturales.

Los números naturales aparecen por la necesidad de contar cosas. Es un conjunto infinito que comienza en el cero y que va aumentando una unidad sucesivamente sin llegar a ningún final. Se representan por $\mathbb{N}$ y es el conjunto: $\mathbb{N}$ = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8....}. Algunos libros no incluyen el cero pero en general si se incluye.

Las operaciones con los números naturales son la suma, la resta (o diferencia), el producto, la potencia de base natural y exponente natural y la división. En la división se cumple: D = d·c + r con D: dividendo, d: divisor, c: cociente y r: resto. Las propiedades que cumplen las operaciones son las conocidas.

Números enteros.

Son los números naturales a los que añadimos todos los negativos (se utiliza el signo "-" delante del número). Se se representan con $\mathbb{Z}$ y es el conjunto: $\mathbb{Z}$ = {..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3...}

Las operaciones son las mismas que en los naturales, pero hay que tener en cuenta las reglas al operar con los signos de los números. Vamos a añadir la operación valor absoluto que se define como el número natural resultante de suprimir el signo del número, se representa con $|a|$. Ejemplo: $|-3| = 3$.

Números racionales.

Los números racionales representan el cociente entre dos números enteros $\frac{a}{b}$, se le llama fracción siendo la parte superior, a, el numerador y la parte inferior, b, el denominador y con $b \neq 0$. Se representa por $\mathbb{Q}$ y es el conjunto $\mathbb{Q} = \{ \frac{a}{b} \ / \ a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$.

También podemos decir que los números racionales están formados por los enteros, los decimales exactos y los decimales periódicos.

Las operaciones de las fracciones son conocidas así que no vamos a insistir en ellas. Los números racionales se pueden representar como fracción de varias maneras, cuando esto ocurre se dice que los números racionales son equivalentes, por ejemplo $\frac{1}{5}$ y $\frac{2}{10}$ son fracciones equivalentes.

Números reales.

Los números reales están formados por los racionales y los llamados irracionales. Los irracionales están formados por los número que tiene infinitos decimales pero no se pueden expresar en forma de fracción, tiene infinitas cifras no periódicas. Por ejemplo: e, π, $\sqrt{2}$ ... Los números irracionales se representan por I mientras que los reales se representan con $\mathbb{R}$. Las operaciones de los números reales son conocidas así que no abundaremos en ellas.

Números complejos.

Aunque no vamos a trabajar con ellos, hay otro conjunto de números que se llaman complejos y se representan con $\mathbb{C}$, los complejos engloban a los números reales y a los llamados números imaginarios.

Vamos a ver un gráfico que nos muestra las relaciones entre los distintos conjuntos de números.

$$\mathbb{C}\ \text{Complejos}\begin{cases}\mathbb{R}\quad \text{Reales}\begin{cases}\mathbb{Q}\quad \text{Racionales}\begin{cases}\mathbb{Z}\quad \text{Enteros}\begin{cases}\mathbb{N}\quad \text{Naturales}\\ \quad\ \ \text{Enteros negativos}\end{cases}\\ \text{Fraccionarios}\end{cases}\\ \text{Irracionales}\end{cases}\\ \text{Imaginarios}\end{cases}$$

Número primos y compuestos.

Decimos que un número entero b es <u>divisible</u> por otro entero a distinto de cero si existe un entero c tal que b = a.c, se puede escribir también que $a|b$ y se dice que a divide a b, que a es divisor de b o que b es múltiplo de a. Otra forma de expresarlo es diciendo que el resto de la división entera a/b es cero.

Cuando un número sólo es divisible por si mismo y por 1 se dice que es un <u>número primo</u>, si un número tiene otros divisores distintos del 1 y de si mismo se dice que es un <u>número compuesto</u>. Por ejemplo son primos 2, 3, 5, 7, 11...; son compuestos $4 = 2^2$, $6 = 2.3$, $8 = 2^3$...

Hay un famoso algoritmo para obtener una tablas de números primos llamada <u>criba de Eratóstenes.</u> Vamos a ver como se aplica con un ejemplo, calculemos los primos entre 1 y 30. El 1 no se considera al calcular números primos. El dos es primo, entonces borramos de la tabla todos los múltiplos del 2, es decir, los pares (4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28 y 30), el siguiente primo es el 3 y borramos todos los múltiplos de 3 que quedan (9, 15, 21 y 27), operamos de la misma forma con los siguientes primos (5, 7, 11...) y al final tendremos una tabla con los primos hasta el 30.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

Se llama <u>factorizar</u> a descomponer un número en los factores primos que lo componen. Por ejemplo, factorizemos $100 = 2^2.5^2$

Divisibilidad de enteros.

Para saber si un número es divisible por otro hay unos criterios que suele ser sencillos, vamos a ver unos pocos de los más utilizados:

<u>Criterio del 2.</u> Un número es divisible por 2 si y solo si termina en cero o cifra par.

<u>Criterio del 3.</u> Un número es divisible por 3 si y solo si la suma de sus cifras es múltiplo de 3.

<u>Criterio del 4.</u> Un número es divisible por 4 si y solo si las dos últimas cifras son 00 o múltiplo de 4.

<u>Criterio del 5.</u> Un número es divisible por 5 si y solo si termina en 0 o 5.

<u>Criterio del 6.</u> Un número es divisible por 6 si y solo si es divisible por 2 y por 3.

Criterio del 9. Un número es divisible por 9 si y solo si la suma de sus cifras es múltiplo de 9.

Criterio del 10. Un número es divisible por 10 si y solo si termina en 0.

Criterio del 11. Un número es divisible por 11 si y solo si la suma de sus cifras en lugar par menos la suma de sus cifras en lugar impar es 0 o múltiplo de 11.

Por ejemplo el 1254 es divisible por 2 (termina en 4), por 3 (la suma de sus cifras es 1 + 2 + 5 + 4 = 12 que es divisible por 3), por 6 (es divisible por 2 y por 3) y por 11 (la suma de las cifras en lugar par es 5 + 1 = 6, la suma de sus cifras en lugar impar es 4 + 2 = 6, 6 - 6 = 0).

Cálculo del mínimo común múltiplo (mcm).

El mínimo común múltiplo de varios números es el menor de todos los múltiplos comunes a todos los números. Se representa como mcm.

Para calcularlo lo primero que hacemos es factorizar todos los números. Luego se escogen los factores comunes elevados al máximo exponente y los factores no comunes, se multiplican y tenemos el mcm.

Ejemplo: calculemos el mcm de 100, 250 y 300.

$100 = 2^2.5^2$; $250 = 2.5^3$; $300 = 2^2.3.5^2$. Entonces mcm = $2^2.3.5^3 = 1500$.

Cálculo del máximo común divisor (MCD).

El máximo común divisor de varios números es el mayor natural que es a la vez divisor de todos ello. Se representa como MCD.

Para calcularlo lo primero que hacemos es factorizar todos los números. Luego se escogen los factores comunes elevados al mínimo exponente, se multiplican y tenemos el MCD.

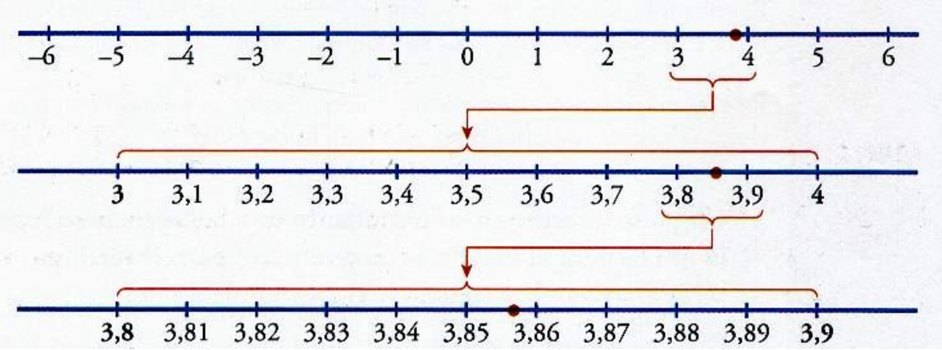
Ejemplo: calculemos el MCD de 100, 250.

$100 = 2^2.5^2$; $250 = 2.5^3$. Entonces MCD = $2.5^2 = 50$.

Importante: La divisibilidad y el cálculo del mcm y del MCD los hemos estudiado para los números enteros, para naturales se puede extender el estudio pero teniendo en cuenta el signo que en algunos casos puede complicar el estudio.

Representaciones de números.

Los números reales, y por tanto también los naturales, enteros, racionales e irracionales, pueden representarse gráficamente en una recta llamada la recta real, de modo que en el centro está el 0, a la izquierda se dibujan los números negativos y a la derecha los números positivos. Veamos una gráfica de la recta real y como al "acercarnos" aumenta el detalle de los números representados. De esta forma, ampliando las veces necesarias podemos representar todos los números reales.



EJERCICIOS

1.- Dados: $A = \{x \in \mathbb{R} ; x \geq \sqrt{2}\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} ; 2 < x < \frac{17}{3}\}$, $C = \{x \in \mathbb{R} ; x \leq -3\}$, calcula:

a) $A \cup B$

b) $A \cap B$

c) $A \cup B \cup C$

d) $A \cap B \cap C$

2.- Dados los siguientes números, di si son primos o no:

a) 71 b) 10 c) 67 d) 1007

3.- Dados los números $\frac{246}{22}$ y $\frac{123}{22}$, escríbelos en forma decimal. Dados los números 32,4111... y 27,08282..., exprésalos en forma de fracción.

4.- Factoriza los siguientes números:

a) 234 b) 2475 c) 231 d) 5445

5.- Explica en qué consiste la criba de Eratóstenes. Aplícalo a los primos menores de 50.

6.- Diferencia entre un número primo y un número compuesto. Explique utilizando ejemplos los criterios de divisibilidad de 3, 4, 6 y 11.

7.- Una orquesta está compuesta por 180 músicos de los cuales:

a) 6 no tocan más que el violonchelo

b) 24 tocan el violonchelo y el violín, pero no la viola.

c) 12 tocan el violonchelo y la viola, pero no el violín.

d) 6 tocan el violín y la viola pero no el violonchelo.

Además sabemos que 63 músicos tocan el violín, 54 el violonchelo y 36 la viola. ¿Cuántos músicos no tocan ninguno de los tres instrumentos?.

8.- Tenemos el conjunto universal $U = \{2,4,6,8,10,12,14\}$ y los conjuntos $P = \{2,4,6,8\}$, $Q = \{2,10\}$ y $R = \{4,8,10,12\}$, escribe los siguientes conjuntos:

a) $P \cap (Q \cup R)$ b) $(P \cap Q) \cup (P \cap Q)$ c) $Q \cap (P \cup R)$

9.- Sean A = {las vocales del alfabeto español}, B = {a,e,o} y C = {i,u}. Estudia si B y C forman una partición de A. Halla también $\wp(A)$.