TEMA 1: LÓGICA.

Definición.

La lógica es la ciencia que estudia el razonamiento formalmente válido. Para ello tiene un simbolismo que evita las imprecisiones del lenguaje humano y permite comprobar la validez o no del pensamiento. La lógica sirve también de apoyo para otras ciencias al comprobar la veracidad de sus razonamientos.

Proposiciones.

El elemento principal de la lógica proposicional son las proposiciones. Una proposición es una expresión declarativa que puede ser verdadera o falsa. Por ejemplo, “La Luna es un satélite” es una proposición, en este caso verdadera, en cambio la frase “Cierra la ventana” es una orden, no tiene sentido preguntarse si es verdadera o falsa y no es una proposición.

Las proposiciones pueden ser simples (“En Eslovaquia nieva mucho”) o compuestas que están formadas por dos o más proposiciones simples (“ En Eslovaquia nieva mucho y hace frío”). Las proposiciones se pueden clasificar de orden uno si tiene una proposición simple, de orden dos si está compuesta de dos proposiciones simples, de orden tres si está compuesta por tres...

Las proposiciones verdaderas toman valor 1 y las falsas valor 0. Para representar proposiciones se utilizan letras minúsculas empezando por la letra p (p, q, r...), si es necesario se añaden subíndices (p1, p2...). En algunos libros se representan con letras mayúsculas (A, B...).

Operadores lógicos.

Para formar proposiciones compuestas a partir de las simples se utilizan los llamados operadores lógicos que sirven para “unir” proposiciones simples o también compuestas. Para representar los operadores utilizamos la llamada tabla de verdad que es un tabla donde cada proposición toma los valores verdadero o falso y según el operador utilizado obtenemos unos resultados u otros ya que cada operador va a tener una tabla característica. Vamos a ver algunos de los operadores más importantes, pero hay muchos más.

<u>Operador negación.</u> Se lee “no” o “no es cierto que”, se representa por “¬ .Su tabla de verdad es:

p	¬p
1	0
0	1

<u>Operador conjunción.</u> Se lee “y” y se representa por “∧ . Su tabla de verdad es:

p	q	p∧q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Operador disyunción. Se lee “o” y se representa por “$\vee$. Su tabla de verdad es:

p	q	p$\vee$q
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Operador condicional. Se lee “si p entonces q” y se representa por “$\rightarrow$. Su tabla de verdad es:

p	q	p$\rightarrow$q
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Operador bicondicional. Se lee “si y solo si p entonces q” y se representa por “$\leftrightarrow$. Su tabla de verdad es:

p	q	p$\leftrightarrow$q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Para unir distintas proposiciones con operadores se utilizan paréntesis, pero en caso de duda el orden de importancia es primero la negación, después la conjunción y la disyunción (iguales), les sigue el condicional y el último es el bicondicional.

Tautologías, contradicciones e indeterminaciones.

Una proposición es una tautología si siempre toma el valor 1 sean cuales sean los valores de las proposiciones simples que la forman.

Una proposición es una contradicción si siempre toma el valor 0 sean cuales sean los valores de las proposiciones simples que la forman.

Una proposición es una indeterminación si siempre toma distintos valores dependiendo de los valores de las proposiciones simples que la forman.

Veamos un ejemplo de cada una.

Tautología: $\neg(p\wedge\neg p)$

p	$\neg p$	$p\wedge\neg p$	$\neg(p\wedge\neg p)$
1	0	0	1
0	1	0	1

Contradicción: $p\wedge(q\wedge\neg p)$

p	q	$\neg p$	$q\wedge\neg p$	$p\wedge(q\wedge\neg p)$
1	1	0	0	0
1	0	0	0	0
0	1	1	1	0
0	0	1	0	0

Indeterminación: Podemos mirar cualquiera de los operadores lógicos, son indeterminaciones.

Una proposición condicional que es una tautología se llama implicación y se lee implica, su símbolo es "$\Rightarrow$". Una proposición bicondicional que es una tautología se llama equivalencia y se lee es equivalente, su símbolo es "$\Leftrightarrow$". Una equivalencia es como una igualdad, podemos sustituir un miembro por el otro.

Leyes de la lógica.

Son aquellas proposiciones que son tautologías, hay muchas, algunas de la más importantes son:

<u>Leyes de idempotencia:</u> $p\wedge p\Leftrightarrow p$, $p\vee p\Leftrightarrow p$

<u>Leyes asociativas:</u> $(p\wedge q)\wedge r\Leftrightarrow p\wedge(q\wedge r)$, $(p\vee q)\vee r\Leftrightarrow p\vee(q\vee r)$

<u>Leyes conmutativas:</u> $p\wedge q\Leftrightarrow q\wedge p$, $p\vee q\Leftrightarrow q\vee p$

<u>Leyes distributivas:</u> $p\vee(q\wedge r)\Leftrightarrow(p\vee q)\wedge(q\vee r)$, $p\wedge(q\vee r)\Leftrightarrow(p\wedge q)\vee(q\wedge r)$

<u>Leyes de Morgan:</u> $\neg(p\wedge q)\Leftrightarrow\neg q\vee\neg p$, $\neg(p\vee q)\Leftrightarrow\neg q\wedge\neg p$

<u>Leyes de la doble negación:</u> $\neg\neg p\Leftrightarrow p$

Con las leyes se simplifican proposiciones complicadas para convertirlas en otras más sencillas.

La inferencia lógica.

Vamos a ver solo casos muy sencillos. Una inferencia lógica o razonamiento es un proceso en el que partimos de unas proposiciones admitidas a las que llamanos premisas y llegamos a una proposición que se obtiene de las anteriores que llamamos conclusión. Por ejemplo:

Premisa 1: Si hago mucho deporte entonces estoy cansado.	$p\rightarrow q$
<u>Premisa 2: Hoy he hecho mucho deporte.</u>	<u>p</u>
Conclusión: Estoy cansado.	q

Para saber si el razonamiento es cierto representamos el razonamiento de forma simbólica como vemos a la derecha, construimos una tabla de verdad con las premisas y la conclusión; si en alguna de las filas las premisas tiene valor verdadero pero la conclusión tiene valor falso entonces el razonamiento no es válido, si no se da el caso anterior entonces el razonamiento es válido.

p	q	$p \rightarrow q$	q
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	0

Vemos que en la primera fila las dos premisas tiene valor verdadero y la conclusión también por lo tanto el razonamiento es verdadero.

Cuantificadores.

Los cuantificadores son símbolos que tienen mucha importancia en las matemáticas y se utilizan para indicar cuantos elementos de un conjunto cumplen una determinada propiedad.

Cuantificador universal. Se lee “para todo x...”, “para cualquier x...”, “para cada x...” la frase se finaliza “se verifica p(x)”, “se cumple p(x)” o “se satisface p(x). El símbolo es $\forall x$, con lo que una proposición completa se escribe $\forall x\ p(x)$ y se lee por ejemplo “para todo x se cumple p(x)”.

Negar una expresión con cuantificador universal. La negación de $\forall x\ p(x)$ es $\neg(\forall x\ p(x))$ (“no es cierto que todo x verifique p(x)”), se puede escribir también $\exists x\ \neg p(x)$ (“algún x satisface $\neg p(x)$).

Cuantificador existencial. Se lee “existe x...”, “para algún x...”, “para al menos un x...” la frase se finaliza “se verifica p(x)”, “se cumple p(x)” o “se satisface p(x). El símbolo es $\exists x$, con lo que una proposición completa se escribe $\exists x\ p(x)$ y se lee por ejemplo “para algún x se cumple p(x)”.

Negar una expresión con cuantificador existencial. La negación de $\exists x\ p(x)$ es $\neg(\exists x\ p(x))$ (“no es cierto que exista x que verifique p(x)” o ningún x satisface p(x)), se puede escribir también $\forall x\ \neg p(x)$ (“todo x satisface $\neg p(x)$).

Podemos estudiar la veracidad o falsedad de una proposición con cuantificadores. Por ejemplo la afirmación “existen números reales con cuadrados negativos” ($\exists x\ p(x)$) es falsa ya que el cuadrado de un número real es siempre positivo. En cambio la sentencia “para cualquier número real su cuadrado es positivo” ($\forall x\ p(x)$) es verdadera ya que el cuadrado de cualquier número real es siempre positivo.

EJERCICIOS

1.-Haga las tablas de verdad de las siguientes expresiones lógicas:

a) $\neg(p\wedge q)\vee(\neg p\wedge\neg q)$

b) $\neg(p\wedge q)\rightarrow\neg p$

c) $\neg(p\rightarrow\neg q)\wedge(p\wedge\neg q)$

d) $(p\rightarrow q)\wedge r \rightarrow \neg(p\vee r)\vee \neg r$

3.- Demuestre las leyes de Morgan.

2.- Escriba en lenguaje matemático, niegue y diga cuáles son verdaderas:

a) Todo número entero no es natural.

b) Existe al menos un número racional que es real.

c) Para todos los números reales, su cuadrado es positivo.

d) Existen números reales tales que el triple del número más siete es mayor que doce.

4.- Niegue las siguientes proposiciones, escríbalas con palabras y diga cuáles son verdaderas.

a) $\exists\, x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{Z}$

b) $\forall\, a, b \in \mathbb{Z} : a - b \in \mathbb{N}$

c) $\forall\, x \subset \mathbb{R} : x + 3x = 4x$

d) $\exists\, x \subset \mathbb{R} : 2x < 13$

5.- Estudia si las siguientes proposiciones son tautología, contradicción o indeterminación:

a) $\neg[(p \wedge q) \Rightarrow p]$

b) $((p \Rightarrow q) \wedge \neg q) \Rightarrow \neg p.$

c) $[\neg(p\vee q)\wedge(p\vee r)]\rightarrow(p\vee r)$

c) $((A\vee B)\rightarrow C)\leftrightarrow((A\rightarrow C)\wedge(B\rightarrow C))$

6.- Comprueba utilizando una tabla de verdad si el siguiente razonamiento es válido: “O llueve o hace sol. Si hace sol entonces vamos al monte de paseo. No se puede ir al monte, luego llueve”.

7.- Comprobar si la siguiente inferencia es válida: “Si trabajo o ahorro, entonces compraré una casa. Si compro una casa, entonces podré guardar el coche en mi casa. Por consiguiente, si no puedo guardar el coche en mi casa, entonces no ahorro”.

8.- Di si el siguiente razonamiento es válido o no: "Estudio y escucho música al mismo tiempo. Si escucho música entonces muevo los pies. No muevo los pies, entonces estoy estudiando".